- Demain (20 mai) cours à 15 h
- Examen le 8 juin.

Rappel : . Opérateur

. Adjoint $T \in \mathcal{L}(E, F)$

alors $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$

$$T^* : F^* \to E^*$$
$$f \mapsto T^* f : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \langle T^* f, x \rangle := \langle f, Tx \rangle$$

. $K(E,F)$: $f \in \mathcal{L}(E,F)$ t.q. $T(B_E)$ est relativement compacte dans F.

. Lemme (Riesz) ; M sev fermé de E alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, x \in E$, $\|x\|_E = 1$, $d(x, M) \geq 1 - \varepsilon$.

. Thm (Riesz) : B_E compacte $\Leftrightarrow$ dim $E < \infty$.

. Alternative de Fredholm : $T \in K(E)$

a) dim Ker $(Id - T) < \infty$

b) Im $(Id - T)$ est fermée (Im $(Id-T) = $ Ker $(Id - T^*)^\perp$)

c) $Id - T$ injective ssi $Id - T$ surjective

d) dim Ker $(Id - T) = $ dim Ker $(Id - T^*)$.

Démonstration de c) et d) :

c) $Id - T$ injective $\Rightarrow$ $Id - T$ surjective

($\Leftarrow$ en passant à l'adjoint).

Supposons que $Id - T$ est injective et non surjective

Soit $E_1 := (Id - T)E$ est inclus strictement dans E. Soit $E_n := (Id-T)^n E$. Mq $E_{n+1} \subset E_n$ strictement.

Mq $E_2 \subset E_1$ strictement.

Si $x = (Id-T)^2 y = (Id-T)(Id-T)y$

Supposons $\forall x \in E$, $\exists y \in E$

$$(Id-T)x = (Id-T)^2 y$$

Par injectivité de $(Id-T)$, alors

$$\forall x \in E, \exists y \in E, \ x = (Id-T)y,$$

contradictoire avec le fait que $(Id-T)$ est non surjectif.

De même $E_{n+1} \subset E_n$ strictement.

Par le lemme de Riesz ($\mathrm{Im}\,(Id-T)_{|E_n}$ est fermée dans E_n car $T_{|E_n} \in K(E_n)$), il existe une suite (x_n) telle que $\|x_n\|_E = 1$ et

$$d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Soient $n > m$,

$$T(x_n - x_m) = \underbrace{Tx_n - x_n}_{\in E_{n+1} \subset E_{m+1}} + \underbrace{x_m - Tx_m}_{\in E_{m+1}} + \underbrace{x_n}_{E_n \subset E_{m+1}} - x_m$$

donc $\|T(x_n - x_m)\| \geq \frac{1}{2}$, ce qui contredit le fait que T est compact.

d) $\underset{d}{\dim \mathrm{Ker}\,(Id-T)} = \underset{d^*}{\dim \mathrm{Ker}\,(Id-T^*)}$

Mq $d^* \leq d$: alors on aura

$\dim \operatorname{Ker}(Id - T^{**}) \leq \dim \operatorname{Ker}(Id - T^*) \leq \dim \operatorname{Ker}(Id - T)$

Mais $\operatorname{Ker}(Id - T) \subset \operatorname{Ker}(Id - T^{**})$.

d'où $d = d^*$.

Donc mq $d^* \leq d$.

Rq : si $\dim E = d$ alors $\operatorname{Im}(Id - T) = \{0\}$
donc $\operatorname{Ker}(Id - T)^\perp = \{0\}$ donc $d^* = d$.

On suppose donc que $\dim E > d$.
Soit p le projecteur de E sur $\operatorname{Ker}(Id - T)$.
Supposons que $\underset{\dim \operatorname{Ker}(Id - T^*)}{\underset{\shortparallel}{d^*}} > d$.

Alors $d^* = \operatorname{codim} \operatorname{Im}(Id - T)$.
Soit l une application linéaire de $\operatorname{Ker}(Id - T)$ dans $\tilde{E}$, supplémentaire topologique de $\operatorname{Im}(Id - T)$ injective, non surjective (car $d^* > d$).

Soit $B := T + l \circ p$, opérateur compact, montrons que $\operatorname{Ker}(Id - B) = \{0\}$: en effet dans ce cas par c) $\operatorname{Im}(Id - B) = E$: mais soit $x \in \tilde{E} \setminus \operatorname{Im} l$ il n'existe pas de $z \in E$ t.q. $x = (Id - B)z$,
car $(Id - B)z = \underbrace{(Id - T)z}_{} + \underbrace{l \circ p(z)}_{\operatorname{Im} l} = x$

$\tilde{E} \setminus \mathrm{Im}\, \ell$

impossible sauf si $(\mathrm{Id}-T)z = 0$

impossible car $x \notin \mathrm{Im}\, \ell$.

Montrons que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - B) = \{0\}$.

Soit $x \,/\, x - Bx = 0$

Alors $0 = x - Tx - \ell \circ p(x)$

donc $x - Tx = 0$ et $\ell \circ p(x) = 0$

$\Downarrow$

$p(x) = 0$

donc $x = 0$.

4 SPECTRE D'UN OPÉRATEUR

Si $\dim E < \infty$, $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id} - T) \neq \{0\}$

$\iff \mathrm{Im}\,(\lambda \mathrm{Id} - T) \neq E$

DÉFINITION : $T \in \mathcal{L}(E)$.

- L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est $\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda \mathrm{Id}$ est bijective sur $E\}$.
- Le spectre de T est

  $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.
- λ est valeur propre de T si $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id} - T) \neq \{0\}$

  On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T (= spectre "ponctuel").

$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ess}(T)$

où $\sigma_{ess}(T)$ est le spectre essentiel de T

$\to$ $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = \infty$

$\to$ $\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})$ pas fermée

$\to$ $\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})$ fermée mais $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) \neq \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$

<u>Remarque</u> : $\lambda \in \rho(T) \iff R(\lambda) := (\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}$ est continue (résolvante)

<u>PROPOSITION</u> : Si $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\sigma(T)$ est compact dans $\mathbb{C}$, et $\sigma(T) \subset \overline{B(0, \|T\|)}$.

<u>Démonstration</u> :

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ / $|\lambda| > \|T\|$.

Alors $\forall f \in E$, $\exists! \; x = \frac{1}{\lambda}(Tx - f)$ par le théorème de point fixe dans les Banach

(i.e. $\exists! \, x$ / $(T - \lambda \mathrm{Id})x = f$).

- Mq $\sigma(T)$ est fermé, donc que $\rho(T)$ est ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$.

$$(T - \lambda \mathrm{Id})x = f$$

$$\iff x = (T - \lambda_0 \mathrm{Id})^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)x)$$

que l'on peut résoudre de manière unique si

$$|\lambda - \lambda_0| \, \|(T - \lambda_0 \mathrm{Id})^{-1}\| < 1. \qquad \blacksquare$$

II SPECTRE DES OPÉRATEURS COMPACTS :

1 **Théorème** : Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit $T \in K(E)$. Alors :

a) $0 \in \sigma(T)$

b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.

c) soit $\sigma(T) = \{0\}$

soit $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini

soit $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite tendant vers 0.

Remarque : $\sigma(T) = \{0\} \not\Rightarrow T = 0$ (ni T^n).

(Ex : opérateur de Volterra, sur $L^2([0,1])$

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)\,dy \,).$$

$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T)$

Démonstration :

a) Si $0 \in \rho(T)$ alors T est bijectif.

Mais alors $\underbrace{T \circ T^{-1}}_{= Id_E}$ est compact, ce qui n'est pas possible si $\dim E = \infty$ (par le théorème de Riesz).

b) Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Supposons que $\mathrm{Ker}(\lambda Id - T) = \{0\}$

Alors par Fredholm, $\mathrm{Im}(\lambda Id - T) = E$ donc $\lambda \in \rho(T)$.

c) Montrons que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est formé de points isolés : en effet dans ce cas $\sigma(T) \cap \{|\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ est fini ou vide (car $\sigma(T)$ est compact)
et si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points alors ils forment une suite qui tend vers 0.

Mq $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est formé de points isolés.

Soit (λ_n) suite de valeurs props distinctes non nulles telles que $\lambda_n \to \lambda$. Mq $\lambda = 0$.
Soit $e_n \in E$ t.q. $\lambda_n e_n - Te_n = 0$.
La famille (e_n) est indépendante ; si $(e_n)_{1 \leq n \leq k}$ sont indépendants, supposons $e_{k+1} = \sum_{n=1}^{k} \gamma_n e_n$

Alors $\lambda_{k+1} e_{k+1} = \sum_{n=1}^{k} \gamma_n \lambda_n e_n$

$$\text{Donc } 0 = (T - \lambda_{k+1} Id) e_{k+1} = \sum_{n=1}^{k} (\lambda_n - \lambda_{k+1}) \gamma_n e_n.$$

Donc $\gamma_n = 0 \ \forall n$.

Soit $E_k := \mathrm{Vect}(e_n, 1 \leq n \leq k)$, famille croissante : il existe $x_k \in E_k$, $\|x_k\|_E = 1$ t.q. $d(x_k, E_{k-1}) \geq \frac{1}{2}$. Soit $2 \leq n < k$

$\lambda_k^{-1} T x_k - \lambda_n^{-1} T x_n$

$$= \lambda_k^{-1}\,(\overline{Tx_k - \lambda_k x_k}) - \lambda_n^{-1}\,(\overline{Tx_n - \lambda_n x_n})$$

$$+ x_k - \underbrace{x_n}_{E_n} .$$

$$= x_k - f_{k-1} \quad \text{avec } f_{k-1} \in E_{k-1}$$

Donc $\| \lambda_k^{-1} T x_k - \lambda_n^{-1} T x_n \| \geq \frac{1}{2}$.

donc comme T est compacte, $\lambda = 0$. ■

<u>Rq</u> : T compact, f continue $E \to F$

$\Rightarrow T \circ f$ compacte ?

$\underbrace{T\circ f(B_E)}$ relt. compact dans E.

borné dans F car f est continue.

$T \circ f(B_E)$ est relt. compact.

② <u>Cas auto-adjoint compact</u> :

Soit H un espace de Hilbert. Alors H^* s'identifie à H et donc si $T \in \mathcal{L}(H)$, $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

Un opérateur auto-adjoint est tel que

$$\forall x, y \in H, \quad (Tx | y) = (x | Ty).$$

$\sigma(T)$ est réel

<u>PROPOSITION</u> : Soit H un espace de Hilbert réel, et $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Alors soit $m := \inf_{\|x\|=1} (Tx|x)$

$$M := \sup_{\|x\|=1} (Tx|x)$$

alors $\{m, M\} \in \sigma(T) \subset [m, M]$.

<u>Remarque</u> : T autoadjoint $\sigma(T) = \{0\} \Rightarrow T = 0$.

$(Tx|y) = \frac{1}{2}\left[(T(x+y)|x+y) - (Tx|x) - (Ty|y)\right]$.

<u>Démonstration</u> : (Lax-Milgram).

(Rappel : spectre $\sigma(T)$; $\sigma_p(T)$

T compact . $0 \in \sigma(T)$

. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$)

Soit $\lambda > M$. Mq $\lambda \in \rho(T)$.

Rappel pour Lax-Milgram :

$a(x,y)$ bilinéaire continue coercive.

$\forall z \in H, \exists! x \in H, \forall y \in H, a(x,y) = (z|y)$.

On pose $a(x,y) = (\lambda x - Tx | y)$.

a est continue : $|a(x,y)| \leq (|\lambda| + \|T\|) \|x\| \|y\|$

coercive : $a(x,x) = (\lambda x - Tx | x)$

$= \lambda \|x\|^2 - (Tx|x)$

$\geq (\lambda - M) \|x\|^2$.

$\forall z \in H, \exists! x \in H, \forall y \in H,$

$(\lambda x - Tx | y) = (z|y)$.

Donc $\lambda \in \rho(T)$.

. Mq $M \in \sigma(T)$.

Soit x_n une suite de H t.q. $\|x_n\| = 1$
et $(Tx_n | x_n) \longrightarrow M$.

Mq $\quad Mx_n - Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Soit $b(x,y) := (Mx - Tx | y)$.

Alors $b(x,y)$ est un produit scalaire, donc

$$b^2(x,y) \leq b(x,x)\, b(y,y) \quad \forall (x,y) \in H \times H$$

Soit $y = Mx - Tx$. Alors

$$\|Mx - Tx\|^4 \leq C(Mx - Tx | x)\, \|Mx - Tx\|^2$$

car $\quad b(y,y) \leq \underbrace{(|M| + \|T\|)}_{C} \|y\|^2$

Alors $\quad \|Mx - Tx\|^2 \leq C\,(Mx - Tx | x)$

donc $\quad \|Mx_n - Tx_n\|^2 \leq C\left(M - (Tx_n | x_n)\right)$

car $\|x_n\| = 1$,

d'où $\quad \|Tx_n - Mx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Si $M \in \rho(T)$ alors $M\mathrm{Id} - T$ est bijective

donc on écrit

$$x_n = (M\mathrm{Id} - T)^{-1} \underbrace{(M\mathrm{Id} - T)x_n}_{\downarrow\, 0},$$

contradictoire avec $\|x_n\| = 1$. ∎

THÉORÈME : Soit H un espace de Hilbert réel séparable, et $T \in K(H)$ auto-adjoint non nul. Alors H admet une base hilbertienne de vecteurs propres de T.

Démonstration : $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ les valeurs propres de T, distinctes, formant une suite tendant vers 0 (ou les λ_n sont en nombre fini).

Soit $E_n := \operatorname{Ker}(\lambda_n \mathrm{Id} - T)$, et $\lambda_0 = 0$.

$\dim E_n < \infty$ si $n \geq 1$.

. Soit $y_n \in E_n$, $y_m \in E_m$, $n \neq m$.

Mq $(y_n | y_m) = 0$:

$$
\begin{aligned}
(Ty_n | y_m) &= \lambda_n (y_n | y_m) \\
&= (y_n | Ty_m) \\
&= \lambda_m (y_n | y_m).
\end{aligned}
$$

D'où $(y_n | y_m) = 0$ puisque $\lambda_n \neq \lambda_m$.

. Soit $F = \operatorname{Vect}(E_n, n \geq 0)$. Mq F est dense dans H, en montrant que $F^\perp = \{0\}$.

On a $T(F) \subset F$ (si $x \in F$, $x = \sum_{k=0}^{K} x_k e_k$, $e_k \in E_k$ ...)

Mais on a aussi $T(F^\perp) \subset F^\perp$.

Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$

$$(Tx|y) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{Ty}_{F}) = 0 \text{ donc } Tx \in F^\perp.$$

Alors $T_{|F^\perp} \in K(F^\perp)$ auto-adjoint.

Soit λ valeur propre de $T_{|F^\perp}$ alors λ est une valeur propre de T, donc si e est un vecteur propre associé à λ, on a $e \in F \cap F^\perp$ donc $e = 0$. Donc $\sigma(T_{|F^\perp}) = \{0\}$. Mais alors $T_{|F^\perp} = 0$. Donc $F^\perp \subset \operatorname{Ker} T$

Mais $\operatorname{Ker} T \subset F$, donc $F^\perp = \{0\}$.

Pour conclure on construit une base hilbertienne de H en choisissant une base de chacun des E_n pour $n \geq 1$. E_0 est fermé dans H séparable donc il est séparable : Si (x_n) est une famille dense dans H alors $\forall y \in E_0$, $\|P_{E_0}(x_n) - y\| = \|P_{E_0}(x_n) - P_{E_0}(y)\|$

$$\leq \|x_n - y\|$$

On associe à ces vecteurs une base hilbertienne de E_0. ce qui donne le résultat. $\blacksquare$

APPLICATIONS À LA RÉSOLUTION D'EDP

I — Laplacien dans un domaine borné : Ω ouvert régulier $\subset \mathbb{R}^d$

Dirichlet $\begin{cases} -\Delta u + au = g & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ $\quad a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a \geqslant 0$

II — Chaleur $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

$u(0,x) = u_0(x)$ si $t = 0$

III — Chaleur $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$

I. DÉFINITION :

— Solution "classique"

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifie l'équation.

— Solution "faible"

$u \in H^1_0(\Omega)$, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx}_{\left(\text{"}\int -\Delta u \cdot v\text{"}\right)} + \int_\Omega a u v \, dx = \int_\Omega g v \, dx.$$

$H^{-1} \times H^1_0$

(une solution classique est une solution faible)

① THÉORÈME : Soit $g \in L^2(\Omega)$ alors $\exists!\, u \in H^1_0(\Omega)$ solution faible. Elle s'obtient par le "principe de Dirichlet" :

$$\frac{1}{2}\int \left(|\nabla u|^2 + a u^2\right) dx - \int g u \, dx$$

$$= \min_{v \in H^1_0(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\int \left(|\nabla v|^2 + a v^2\right) dx - \int g v \, dx\right)$$

Démonstration :

Soit $b(u,v) := \int \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int a u v \, dx$

défini sur $H = H^1_0(\Omega)$.

$$|b(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \sup_\Omega |a(x)| \, \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$|b(u,u)| = \int |\nabla u|^2 + \int a u^2$$

Inégalité de Poincaré : dans un domaine borné, si $u \in H^1_0(\Omega)$ alors

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

$u \in \mathcal{D}(\Omega)$: $u(x) = \int_{-\infty}^{x_d} \partial_d u(x', y) \, dy$

où $x' = (x_1, .., x_{d-1})$. Par Cauchy-Schwarz

$$|u(x)| \leq C \, \|\partial_d u(x', \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\|u\|_{L^2} \leq C' \|\partial_d u\|_{L^2} \leq C' \|\nabla u\|_{L^2}$$

Donc $b(u,u) \geq C_0 \|u\|^2_{L^2}$.

Par Lax-Milgram, $\forall g \in L^2(\Omega)$, $\exists ! \, u \in H^1_0(\Omega)$ t.q. $\forall v \in H^1_0(\Omega)$, $b(u,v) = \int g v \, dx$.

$\blacksquare$

(2) <u>Théorème</u> : $\exists (e_n)$ base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et une suite (λ_n) suite de nombres >0 tendant vers ∞ telles que $e_n \in H^1_0(\Omega)$ et e_n est solution faible de $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ dans Ω.

<u>Demonstration</u> : $\forall \in L^2(\Omega)$, $\exists ! u \in H^1_0(\Omega)$ solution faible de $-\Delta u = g$.

On note T l'opérateur qui à g associe u :
$Tg = u$ t. q. $\int \nabla u . \nabla v = \int g v \quad \forall v \in H^1_0$.

T est linéaire continu de L^2 dans $H^1_0(\Omega)$.
On voit T comme un opérateur dans $\mathcal{L}(L^2)$
et meme on a $T \in \mathcal{K}(L^2)$
($Id_{H^1_0 \to L^2}$ est compacte, et $T = Id_{H^1_0 \to L^2} \circ \overline{T}$
où $\overline{T} g = u$ opérateur continu de L^2 dans $H^1_0(\Omega)$).

De plus $\operatorname{Ker} T = 0$: si $Tg = 0$
alors $\int g v = 0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$ donc $g = 0$.

Soit (μ_n) la suite des valeurs propres de T,
$\mu_n \to 0$, et e_n la famille de vecteurs propres associés, qui est une base hilbertienne.

Mq $\mu_n > 0$: $Te_n = \mu_n e_n$
Si $u_n := Te_n$ alors $u_n \in H^1_0(\Omega)$

(donc $e_n \in H_0^1(\Omega)$) et $\int |\nabla u_n|^2 = \int e_n u_n$

$$= \mu_n .$$

Donc $\mu_n > 0$. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$

Alors $\displaystyle\int \nabla e_n \cdot \nabla v = \frac{1}{\mu_n} \int \nabla T e_n \cdot \nabla v$

$$= \frac{1}{\mu_n} \int e_n \cdot v .$$

D'où le résultat avec $\lambda_n = \dfrac{1}{\mu_n}$. $\blacksquare$

(Rq : $\mathbb{R}$ $\quad -u'' + x^2$: $\quad 2n+1$.)

II $\quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$

On cherche $u(t) \in L^2(\Omega)$ $\forall t$.

$$u(t) = \sum a_n(t) e_n$$
$$-\Delta u(t) = \sum a_n(t) \lambda_n e_n$$

$$\partial_t u(t) = \sum a_n'(t) e_n$$

$$a_n'(t) = -\lambda_n a_n(t)$$

$$a_n(t) = \underbrace{a_n(0)} e^{-\lambda_n t} .$$

III. Chaleur dans $\mathbb{R}^d$

On cherche $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$

$$\left(i\partial_t - \frac{1}{2}\Delta\right) E = \delta_0 \quad (*)$$

<u>Thm</u> : Soit $E(t,x) = \dfrac{1}{(2\pi i t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2ti}} \mathbb{1}_{t>0}$

C'est l'unique distribution tempérée à support dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$ qui vérifie $(*)$

<u>Dém</u> : Fourier partiel en x.